

• تعريف دالة أصلية لدالة

f دالة معرفة على مجال I. نسمي دالة أصلية للدالة f على I كل دالة F معرفة و قابلة للاشتقاق على I حيث من أجل كل عدد x من I ، $F'(x) = f(x)$.

• مبرهنة (وجود دالة أصلية)

كل دالة معرفة و مستمرة على مجال I تقبل على الأقل دالة أصلية على هذا المجال.

• مبرهنة

إذا كانت f دالة معرفة على مجال I و F دالة أصلية لها على I
فإن الدوال الأصلية للدالة f على I هي الدوال G المعرفة على I كما يلي :
من أجل كل عدد x من I، $G(x) = F(x) + c$ حيث c عدد حقيقي.

• مبرهنة

f دالة معرفة و مستمرة على مجال I و F دالة أصلية لها على I.
إذا كان $x_0 \in I$ و $y_0 \in \mathbb{R}$ فإنه توجد دالة أصلية وحيدة G للدالة f حيث $y_0 = G(x_0)$ و معرفة على I كما يلي : من أجل كل عدد x من I، $G(x) = F(x) + y_0 - F(x_0)$.

• نتيجة : إذا كانت f دالة معرفة على مجال I و F دالة أصلية لها على I فإن الدالة $x \longmapsto F(x) - F(x_0)$ المعرفة على I هي الدالة الأصلية الوحيدة للدالة f على I و التي تنعدم عند x_0.

• دوال أصلية لدوال مألوفة

الدالة f هي الدالة ...	الدوال الأصلية للدالة f هي الدوال F ...	مجال تعريف I للدالتين f و F
$x \longmapsto k$ حيث $k \in \mathbb{R}$	$x \longmapsto kx + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$	$I = \mathbb{R}$
$x \longmapsto x^n$ حيث $n \in \mathbb{Z}^* - \{-1\}$	$x \longmapsto \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$	إذا كان $n \geq 1$ فإن $I = \mathbb{R}$ إذا كان $n \leq -2$ فإن $I =]0 ; +\infty[$ أو $I =]-\infty ; 0[$
$x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \longmapsto 2\sqrt{x} + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$	$I =]0 ; +\infty[$
$x \longmapsto \cos x$	$x \longmapsto \sin x + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$	$I = \mathbb{R}$
$x \longmapsto \sin x$	$x \longmapsto -\cos x + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$	$I = \mathbb{R}$
$x \longmapsto \cos(ax + b)$ حيث $a \in \mathbb{R}^*$ و $b \in \mathbb{R}$	$x \longmapsto \frac{1}{a}\sin(ax + b) + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$	$I = \mathbb{R}$
$x \longmapsto \sin(ax + b)$ حيث $a \in \mathbb{R}^*$ و $b \in \mathbb{R}$	$x \longmapsto -\frac{1}{a}\cos(ax + b) + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$	$I = \mathbb{R}$
$x \longmapsto \frac{1}{\cos^2 x}$	$x \longmapsto \tan x + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$	$I =]-\frac{\pi}{2} + k\pi ; \frac{\pi}{2} + k\pi[$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

• **استعمال دساتير دوال مشتقة**

u دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على مجال I و c عدد حقيقي.

الدالة f معرفة كما يلي ...	الدوال الأصلية F للدالة f معرفة كما يلي ...	ملاحظات
$f(x) = u'(x) . u(x)^n$ حيث $n \in \mathbb{Z}^* - \{-1\}$	$F(x) = \frac{1}{n+1} \cdot u(x)^{n+1} + c$	إذا كان $n > 0$ فإن $I = \mathbb{R}$ إذا كان $n < 0$ و $n \neq -1$ فإن $I = \mathbb{R}$ باستثناء الأعداد x من I حيث $u(x) = 0$
$f(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$F(x) = 2\sqrt{u(x)} + c$	$I = \mathbb{R}$ باستثناء الأعداد x من I حيث $u(x) \leq 0$.
$f(x) = [\cos u(x)].u'(x)$	$F(x) = \sin u(x) + c$	I
$f(x) = [\sin u(x)].u'(x)$	$F(x) = -\cos u(x) + c$	I
$f(x) = (v' \circ u)(x).u'(x)$	$F(x) = (v \circ u)(x) + c$	v هي دالة قابلة للاشتقاق على المجال J حيث $f(I) \subset J$.

• ملاحظة : يمكن لدالة أن تكون غير قابلة للاشتقاق على مجال و تقبل دوالا أصلية على هذا المجال.

الدالة $x \longmapsto \sqrt{x}$ مستمرة على $[0 ; +\infty[$ و قابلة للاشتقاق على $]0 ; +\infty[$ لكنها تقبل على الأقل دالة أصلية على $[0 ; +\infty[$ مثل الدالة $x \longmapsto \frac{2}{3} x\sqrt{x}$.

1 تعيين دوال أصلية بسيطة

تمرين 1

F دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $F(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 4$

و f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = 6x^2 - 2x + 3$

1- بين أن الدالة F هي دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

2- عين دالة أصلية أخرى G للدالة f على $\mathbb{R}$.

حل

• الدالة F دالة كثير الحدود. إذن F معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x : $F'(x) = 6x^2 - 2x + 3$. نلاحظ أن من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $F'(x) = f(x)$.

ينتج أن الدالة F هي دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$. و بالتالي الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي الدوال $x \longmapsto F(x) + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$.

• لإيجاد دالة أصلية أخرى G للدالة f على $\mathbb{R}$، يكفي تغيير الحد الثابت في عبارة $F(x)$.

الدالة G المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $G(x) = 2x^3 - x^2 + 3x + 1$ هي دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$

تمرين 2

1- أوجد دالة أصلية لكل من الدالتين f و g المعرفتين على I و J كما يلي:

$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5x + 4$ و $I = \mathbb{R}$ ؛ $g(x) = \frac{1}{x^2}$ و $J =]0 ; +\infty[$.

2- أوجد كل الدوال الأصلية لكل دالة من الدالتين f و g .

حل

• الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $F(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 4^x$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$

و من أجل كل عدد حقيقي x ، $F'(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5x + 4$.

$= f(x)$

إذن الدالة F هي دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

الدالة G المعرفة على المجال $]0 ; +\infty[$ كما يلي : $G(x) = -\frac{1}{x}$ قابلة للاشتقاق على المجال $]0 ; +\infty[$

و من أجل كل عدد حقيقي x من $]0 ; +\infty[$ ، $G'(x) = \frac{1}{x^2}$ إذن الدالة G هي دالة أصلية للدالة g على المجال $]0 ; +\infty[$.

• الدوال $x \longmapsto \frac{1}{6}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 4x + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$ هي الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

الدوال $x \longmapsto -\frac{1}{x} + c'$ حيث $c' \in \mathbb{R}$ هي الدوال الأصلية للدالة g على $]0 ; +\infty[$.

2 إيجاد الدالة الأصلية لدالة التي تأخذ قيمة y_0 عند العدد x_0

تمرين

f و g الدالتان المعرفتان على المجال I كما يلي : $I=\mathbb{R}$; $f(x)=x^2-x$; $I=]-\infty;0[$; $g(x)=-\frac{1}{x^2}$

1- عين الدالة الأصلية F للدالة f على $\mathbb{R}$ و التي تأخذ القيمة 1 عند العدد 0.

2- عين الدالة الأصلية G للدالة g على $]-\infty ; 0[$ و التي تنعدم عند العدد 2- .

حل

• الدوال H المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $H(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + c$ ؛ $c \in \mathbb{R}$ هي الدوال الأصلية لـ f على $\mathbb{R}$. لدينا $H(0) = 1$ أي $\frac{1}{3}(0)^3 - \frac{1}{2}(0)^2 + c = 1$. إذن $c = 1$. هذه الدالة الأصلية F للدالة f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 1$

• الدوال L المعرفة على $]-\infty ; 0[$ كما يلي : $L(x) = \frac{1}{x} + \lambda$ ؛ $\lambda \in \mathbb{R}$ هي الدوال الأصلية للدالة g على $]-\infty ; 0[$. لدينا $L(-2) = 0$ أي $\frac{1}{-2} + \lambda = 0$ إذن $\lambda = \frac{1}{2}$.

ينتج أن الدالة الأصلية للدالة g على المجال $]-\infty ; 0[$ و التي تنعدم عند 2- هي الدالة G المعرفة على المجال $]-\infty ; 0[$ كما يلي : $G(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2}$.

3 استعمال الدوال الأصلية لدوال مألوفة

تمرين 1

عين الدوال الأصلية لكل دالة من الدوال f على المجال I في الحالات التالية :

1) $f(x) = x^5 + x^2 - 3x + 6$ ؛ $I = \mathbb{R}$

2) $f(x) = \frac{3}{x^2} - \cos x + 3$ ؛ $I =]0 ; +\infty[$

3) $f(x) = -\frac{2}{\sqrt{x}} + \sin x - 1$ ؛ $I =]0 ; +\infty[$

4) $f(x) = \cos 3x$ ؛ $I = \mathbb{R}$

5) $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ ؛ $I = \mathbb{R}$

حل

1. الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ حيث $f(x) = x^5 + x^2 - 3x + 6$ هي الدوال F المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $F(x) = \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 6x + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$.

2. الدوال الأصلية للدالة f على $]0 ; +\infty[$ حيث $f(x) = \frac{3}{x^2} - \cos x + 3$ هي الدوال F المعرفة على $]0 ; +\infty[$ كما يلي : $F(x) = -\frac{3}{x} - \sin x + 3x + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$.

3. الدوال الأصلية للدالة f على $]0 ; +\infty[$ حيث $f(x) = -\frac{2}{\sqrt{x}} + \sin x - 1$ هي الدوال F المعرفة على $]0 ; +\infty[$ كما يلي $F(x) = -4\sqrt{x} - \cos x - x + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$.

4. الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ حيث $f(x) = \cos 3x$ هي الدوال F المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $F(x) = \frac{1}{3}\sin 3x + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$.

5. الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ حيث $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ هي الدوال F المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $F(x) = -\frac{1}{2}\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$.

تمرين 2

في كل حالة من الحالات التالية، تعرف على عبارة الدالة f ثم عين دالة أصلية للدالة f على المجال ا

1) $f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$ ؛ $I = \mathbb{R}$.
2) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ ؛ $I = \mathbb{R}$.
3) $f(x) = (x-2)(x^2-4x+1)^3$ ؛ $I = \mathbb{R}$.
4) $f(x) = \cos x \,.\, \sin^4 x$ ؛ $I = \mathbb{R}$.

حل

1 • بوضع $u(x) = x^2 + x + 1$. لدينا الدالة u معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ، $u'(x) = 2x + 1$. نلاحظ أن من أجل كل عدد حقيقي x، $u(x) \neq 0$ و $f(x) = \frac{u'(x)}{u^2(x)}$

إذن الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي الدوال F المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $F(x) = \frac{-1}{u(x)} + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$. أي الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي الدوال F المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$F(x) = \frac{-1}{x^2+x+1} + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$.

2 • بوضع $u(x) = x^2 + 1$ و $v(x) = \sqrt{x}$. الدالة u قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ، $u'(x) = 2x$. الدالة v قابلة للاشتقاق على $]0 ; +\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]0 ; +\infty[$ ، $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. لدينا $(v' \circ u)(x) = v'[(x^2+1)] = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}$

نلاحظ أن الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ؛

$$f(x) = u'(x) \times (v' \circ u)(x)$$
$$= (v \circ u)'(x)$$

ينتج أن الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي الدوال $v \circ u$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$$(v \circ u)(x) = v[u(x)] + c$$
$$= v(x^2+1) + c$$
$$= \sqrt{x^2+1} + c$$

أي الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي الدوال F المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $F(x) = \sqrt{x^2+1} + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$.

• **ملاحظة** : بوضع $u(x) = x^2 + 1$ ؛ الدالة u معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد x $u(x) > 0$. لدينا أيضا من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $u'(x) = 2x$.

إذن من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $f(x) = \frac{u(x)}{2\sqrt{u(x)}}$. و بالتالي الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي الدوال F المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = \sqrt{u(x)} + c$ ، $c \in \mathbb{R}$.

أي : من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $f(x) = \sqrt{x^2+1} + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$.

3 . بوضع $u(x) = x^2 - 4x + 1$ ، الدالة u معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد x

$u'(x) = 2x - 4$. نلاحظ أن من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $f(x) = \frac{1}{2} u'(x) \times u^3(x)$

إذن الدوال الأصلية للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = (x - 2) \times (x^2 - 4x + 1)^3$ هي الدوال

F المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} u^4(x) + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$.

أي : من أجل عدد حقيقي x ؛ $F(x) = \frac{1}{8} (x^2 - 4x + 1)^4 + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$.

4 . بوضع $u(x) = \sin x$ ، الدالة u معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

و من أجل كل عدد حقيقي x ، $u'(x) = \cos x$.

نلاحظ أن : من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $f(x) = u'(x) . u^4(x)$. ينتج أن الدوال الأصلية للدالة f

المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = \cos x . \sin^4 x$ هي الدوال F المعرفة على $\mathbb{R}$

كما يلي : $F(x) = \frac{1}{5} u^5(x) + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$.

إذن الدوال الأصلية للدالة f هي الدوال F المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $F(x) = \frac{1}{5} \sin^5 x + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$.

تمرين 1

f دالة معرفة على المجال $]1 ; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$

1. بين أنه يوجد عددان حقيقيان a و b حيث من أجل كل عدد حقيقي x

من المجال $]1 ; +\infty[$ ؛ $f(x) = a + \frac{b}{(x-1)^2}$

2. عين الدوال الأصلية للدالة f على المجال $]1 ; +\infty[$.

3. حدد الدالة الأصلية G للدالة f التي تنعدم عند العدد 2.

حل

1. الدالة f معرفة على المجال $]1 ; +\infty[$ و من أجل كل عدد x حيث $x > 1$ ؛

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 - 1}{(x-1)^2} = 1 - \frac{1}{(x-1)^2}$$

ينتج أن $a = 1$ و $b = -1$. و بالتالي من أجل كل عدد x حيث $x > 1$ ؛ $f(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2}$

• ملاحظة : يمكن توحيد المقامات في العبارة $a + \frac{b}{(x-1)^2}$ ثم مقارنة عبارتي $f(x)$.

2. الدالة f معرفة على $]1 ; +\infty[$ و قابلة للاشتقاق على $]1 ; +\infty[$. نضع $u(x) = x - 1$

الدالة u معرفة و قابلة للاشتقاق على المجال $]1 ; +\infty[$ و من أجل كل عدد x حيث $x > 1$ ؛ $u'(x) = 1$

لدينا من أجل كل عدد x، $f(x) = 1 - \frac{u'(x)}{[u(x)]^2}$

إذن من أجل كل عدد x حيث $x > 1$ ، $f(x) = \left[x + \frac{1}{u(x)}\right]'$

ينتج أن الدوال الأصلية للدالة f على $]1 ; +\infty[$ هي الدوال F المعرفة على $]1 ; +\infty[$ كما يلي :

$F(x) = x + \frac{1}{x-1} + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$.

3. تعيين الدالة الأصلية للدالة f حيث $F(2) = 0$. لدينا $F(2) = 0$ يعني $2 + \frac{1}{2-1} + c = 0$

أي $3 + c = 0$ إذن $c = -3$. ينتج أن الدالة الأصلية F للدالة f حيث $F(2) = 0$

هي الدوال F المعرفة على $]1 ; +\infty[$ كما يلي $F(x) = x + \frac{1}{x-1} - 3$.

تمرين 2

أوجد الدوال الأصلية على $\mathbb{R}$ لكل من الدالتين f و g المعرفتين كمايلي :

$$g(x) = \sin^4 x \quad ; \quad f(x) = \cos^4 x$$

حل

• تعيين العبارة الخطية لكل من $\cos^4 x$ و $\sin^4 x$.

نضع $\cos x + i \sin x = e^{ix}$ و $\cos x - i \sin x = e^{-ix}$ (ترميز أولير)

إذن $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$ و $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$.

ينتج أن $\cos^4 x = \left(\frac{1}{2}\right)^4 (e^{ix} + e^{-ix})^4$ و $\sin^4 x = \left(\frac{1}{2i}\right)^4 (e^{ix} - e^{-ix})^4$.

لدينا $(e^{ix} + e^{-ix})^4 = e^{i4x} + 4e^{i3x}e^{-ix} + 6e^{i2x}e^{-i2x} + 4e^{ix}e^{-i3x} + e^{-i4x}$

$$= (e^{i4x} + e^{-i4x}) + 4(e^{i2x} + e^{-i2x}) + 6$$

$$= 2\cos 4x + 8\cos 2x + 6$$

و بالتالي $\cos^4 x = \frac{1}{16}(2\cos 4x + 8\cos 2x + 6)$

أي أن $\cos^4 x = \frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}$

لدينا أيضا $(e^{ix} - e^{-ix})^4 = e^{i4x} - 4e^{i3x}e^{-ix} + 6e^{i2x}e^{-i2x} - 4e^{ix}e^{-i3x} + e^{-i4x}$

$$= (e^{i4x} + e^{-i4x}) - 4(e^{i2x} + e^{-i2x}) + 6$$

$$= 2\cos 4x - 8\cos 2x + 6$$

و بالتالي $\sin^4 x = \frac{1}{16}(2\cos 4x - 8\cos 2x + 6)$

أي أن $\sin^4 x = \frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}$

إذن الدالتان f و g معرفتان كما يلي :

$$g(x) = \frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8} \quad \text{و} \quad f(x) = \frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}$$

ينتج أن الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي الدوال F المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$F(x) = \frac{1}{32}\sin 4x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{8}x + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$.

الدوال الأصلية للدالة g على $\mathbb{R}$ هي الدوال G المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$G(x) = \frac{1}{32}\sin 4x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{8}x + c'$ حيث $c' \in \mathbb{R}$.

عموميات على الدوال الأصلية

1 في كل حالة من الحالات التالية، اثبت أن الدالة F هي دالة أصلية للدالة f على المجال I.

1. $f(x) = 3x^2 - 1$
$F(x) = (x-2)(x^2+2x+3)$ ؛ $I = \mathbb{R}$

2. $f(x) = \sqrt{x+1}$
$F(x) = \frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}$ ؛ $I =]-1 ; +\infty[$

3. $f(x) = 2\left(x - \frac{1}{x^3}\right)$
$F(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2$ ؛ $I =]0 ; +\infty[$

4. $f(x) = \cos x - x \sin x$
$F(x) = x \cos x$ ؛ $I = \mathbb{R}$

مجموعة الدوال الأصلية - الشروط الأولية

2 f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = 2 \sin 2x$. عين، من بين الدوال التالية، دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

$F : x \longmapsto 2 \sin^2 x$ ؛ $G : x \longmapsto \sin 2x$

$H : x \longmapsto 1 + \cos^2 x$ ؛ $L : x \longmapsto 7 - \cos 2x$

3 أوجد الدالة الأصلية F للدالة f على I حيث $f(x_0) = y_0$ في الحالات التالية :

1. $f(x) = 1 - x + x^2 - x^3$ ؛ $I = \mathbb{R}$
$x_0 = 1$ ؛ $y_0 = 0$

2. $f(x) = -2 \sin 2x$ ؛ $I = \mathbb{R}$
$x_0 = \frac{\pi}{4}$ ؛ $y_0 = 1$

3. $f(x) = \cos 3x$ ؛ $I = \mathbb{R}$
$x_0 = \frac{\pi}{2}$ ؛ $y_0 = 0$

4. $f(x) = x + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ ؛ $I =]0 ; +\infty[$
$x_0 = 1$ ؛ $y_0 = 1$

إستعمال جدول الدوال المشتقة

4 عين الدوال الأصلية لكل دالة f من الدوال التالية على المجال I.

1. $f(x) = x^3 - 2x + 1$ ؛ $I = \mathbb{R}$
2. $f(x) = x + \frac{1}{\sqrt{x}}$ ؛ $I =]0 ; +\infty[$
3. $f(x) = \sin x - 2\cos x$ ؛ $I = \mathbb{R}$
4. $f(x) = \frac{1}{x^2} - x^2$ ؛ $I =]-\infty ; 0[$
5. $f(x) = \cos\left(\frac{x-\pi}{4}\right)$ ؛ $I = \mathbb{R}$
6. $f(x) = 1 - \frac{1}{\cos x^2}$ ؛ $I = \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$
7. $f(x) = (x-3)^4$ ؛ $I = \mathbb{R}$
8. $f(x) = \sin x \cos^2 x$ ؛ $I = \mathbb{R}$
9. $f(x) = 4x(x^2+4)^2$ ؛ $I = \mathbb{R}$
10. $f(x) = \frac{1}{x^2}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^4$ ؛ $I =]0 ; +\infty[$
11. $f(x) = \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}}$ ؛ $I =]0 ; +\infty[$
12. $f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$ ؛ $I =]3 ; +\infty[$
13. $f(x) = \frac{\cos x}{\sin^2 x}$ ؛ $I = \left]0 ; \frac{\pi}{2}\right[$
14. $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$ ؛ $I = \left]0 ; \frac{\pi}{2}\right[$
15. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ ؛ $I =]-1 ; +\infty[$
16. $f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{3 + \sin x}}$ ؛ $I = \mathbb{R}$
17. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ ؛ $I =]-1 ; 1[$
18. $f(x) = x \cos x + \sin x$ ؛ $I = \mathbb{R}$
19. $f(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$ ؛ $I =]-1 ; +\infty[$
20. $f(x) = \sqrt{1+x^2} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ ؛ $I = \mathbb{R}$

تعيين دوال أصلية

5 عين الدوال الأصلية لكل دالة f من الدوال التالية المعرفة على المجال I.

1. $f(x) = cosx\ sin^3x$ ؛ $I = \mathbb{R}$
2. $f(x) = sinx\ cos^2x$ ؛ $I = \mathbb{R}$
3. $f(x) = cosx\ sin^2x$ ؛ $I = \mathbb{R}$
4. $f(x) = \frac{5}{(x+5)^5}$ ؛ $I =]-\infty\ ;\ -5[$
5. $f(x) = \frac{2x^2 + 3x}{x}$ ؛ $I =]0\ ;\ +\infty[$
6. $f(x) = \frac{x^2}{(1 + x^3)^2}$ ؛ $I =]-1\ ;\ +\infty[$
7. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{4x^2 + 1}}$ ؛ $I = \mathbb{R}$

6 f هي الدالة المعرفة على المجال $]1\ ;\ +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 1}{(x^2 - 1)^2}$

و F هي الدالة المعرفة على المجال $]1\ ;\ +\infty[$ كمايلي : $F(x) = \frac{-x - 2}{x^2 - 1}$

برهن أن الدالة F هي دالة أصلية للدالة f على المجال $]1\ ;\ +\infty[$.

7 f و F دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$f(x) = -3x^2 + 4x + 1$

و $F(x) = -x^3 + 2x^2 + x - 1$

1. برهن أن الدالة F هي دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.
2. عين كل الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

8 عين الدوال الأصلية للدالة f على المجال I في كل حالة من الحالات التالية :

1. $f(x) = -x + 3$ ؛ $I = \mathbb{R}$
2. $f(x) = x^2 + x$ ؛ $I = \mathbb{R}$
3. $f(x) = 2x^3 - x + 1$ ؛ $I = \mathbb{R}$
4. $f(x) = \frac{2}{x^3}$ ؛ $I =]0\ ;\ +\infty[$
5. $f(x) = \frac{-3}{x^3} + cosx$ ؛ $I =]0\ ;\ +\infty[$
6. $f(x) = \frac{6}{\sqrt{x}} - x - 2$ ؛ $I =]0\ ;\ +\infty[$
7. $f(x) = sin\ 2x + cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$ ؛ $I = \mathbb{R}$

مسائل

9 f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = \frac{cosx}{\sqrt{4 + sinx}}$

1. عين الدالة الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ و التي تأخذ القيمة 4 عند العدد 0.
2. عين كل الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

10 f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$ كما يلي : $f(x) = \frac{2x^3 + 27}{2x^2}$

1. بين أنه يوجد عددان حقيقيان a و b حيث من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}_+^*$.

$f(x) = ax + \frac{b}{x^2}$

2. عين كل الدوال الأصلية للدالة f على المجال $]0\ ;\ +\infty[$.
3. عين الدالة الأصلية F للدالة f التي تأخذ القيمة 1 عند العدد 1.

11 f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = 3x^2\ (x^2 + 1\ ) + 2x\ (x^3 + 1)$

1. عين الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.
2. ما هي الدالة الأصلية F للدالة f على $\mathbb{R}$ التي تنعدم عند العدد 0؟

12 عين الدوال الأصلية للدالتين f و g المعرفتين على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$f(x) = cos^3x$ و $g(x) = sin^3x$